ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

---------------☙📖❧---------------

ĐINH NHƯ QUỲNH

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG ĐỐI VỚI ÁNH XẠ GIÃN TRONG KHÔNG GIAN G - METRIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN-2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐINH NHƯ QUỲNH

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG ĐỐI VỚI ÁNH XẠ GIÃN TRONG KHÔNG GIAN G - METRIC

Ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS Phạm Hiến Bằng

THÁI NGUYÊN-2019

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Các kết quả chính của luận văn chưa từng được công bố trong các luận văn Thạc sĩ của các tác giả khác.

Tôi xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện Luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong Luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Tác giả

Đinh Như Quỳnh

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS.Phạm Hiến Bằng

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo- Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 04 năm 2019

Tác giả

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Nguyên lí điểm bất động (hay nguyên lí ánh xạ co) đã được Banach chứng minh vào năm 1922. Từ đó đã có nhiều tác giả mở rộng kết quả này cho nhiều loại ánh xạ khác nhau trên các không gian khác nhau. Hướng thứ nhất là mở rộng khái niệm không gian metric. Đầu tiên phải kể đến khái niệm không gian $b-$ metric được đưa ra bởi Bakhtin [2]. Tác giả đã chứng minh Định lí điểm bất động đối với ánh xạ co trong không gian $b-$ metric, là tổng quát hóa của nguyên lí co Banach trong không gian metric. Tiếp đến là khái niệm không gian 2-metric được đưa ra bởi Gahler [4] và khái niệm không gian D-metric được đưa ra bởi Dhage [3]. Năm 2004, Mustafa và Sims [7] đã đưa ra khái niệm không gian G-metric. Gần đây, Một số tác giả như Mustafa, Chugh, Shatanawi, Mohanta,...đã quan tâm nghiên cứu và đạt được một số kết quả về điểm bất động đối với các ánh xạ co trong không gian G-metric đầy đủ. Hướng thứ hai phải kể đến là nghiên cứu điểm bất động trong các không gian nói trên nhưng đối với ánh xạ giãn. Theo hướng này, một số tác giả đã đạt được các kết quả đẹp đẽ như Maheshwari, Mustafa, Awawdeh, Shatanawi, Sahu, Sanodia, Gupta,...

Theo hướng nghiên cứu này chúng tôi chọn đề tài: “*Định lí điểm bất động đối với ánh xạ giãn trong không gian G- metric*“.

Đề tài có ý nghĩa thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

Nội dung đề tài được viết chủ yếu dựa trên các tài liệu [1], [9] và [10], gồm 35trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản của không gian $G-$ metric.

Chương 2: Là nội dung chính của đề tài, trình bày một số kết quả về điểm bất động và điểm bất động chung đối với ánh xạ giãn trong không gian G - metric.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ VỀ KHÔNG GIAN G - METRIC

1.1. Không gian G - Metric

Định nghĩa 1.1.1. Một không gian G - metric là cặp (E,G), trong đó E là một tập khác rỗng và $G : E \times E \times E \to [0,\infty)$ là một hàm sao cho với mọi $u,v,w,a \in E$, các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(G_1) $G(u,v,w) = 0$ nếu $u = v = w$;

(G_2) $G(u,u,v) > 0$ với mọi $u,v \in E$, với $u \neq v$;

(G_3) $G(u,u,v) \leq G(u,v,w)$ với mọi $u,v,w \in E$, với $w \neq v$;

(G_4) $G(u,v,w) = G(u,w,v) = G(v,w,u) = \ldots$ (đối xứng với cả 3 biến);

(G_5) $G(u,v,w) \leq G(u,a,a) + G(a,v,w)$ (bất đẳng thức hình chữ nhật).

Hàm G như trên được gọi là một G - metric trên E.

Các tính chất trên có thể giải thích theo nghĩa của không gian metric. Cho (E,r) là một không gian metric và $G : E \times E \times E \to [0,\infty)$ là hàm số được xác định bởi

$$G(u,v,w) = r(u,v) + r(u,w) + r(v,w) \text{ với mọi } u,u,w \in E.$$

Khi đó (E,G) là một không gian G - metric. Trong trường hợp này, $G(u,v,w)$ có thể hiểu là chu vi của tam giác với các đỉnh u,v và w. Điều kiện (G_1) có nghĩa là với một điểm ta không thể có chu vi dương, và điều kiện (G_2) tương đương với khoảng cách giữa hai điểm khác nhau không thể bằng 0. Hơn nữa, vì chu vi của một tam giác không phụ thuộc vào thứ tự các đỉnh của nó, nên ta có (G_4). Cuối cùng, (G_5) là mở rộng của bất đẳng thức tam giác sử dụng một đỉnh thứ tư.

Ví dụ 1.1.2. Nếu $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, thì hàm $G : E \times E \times E \to [0,\infty)$ được xác định bởi

$$G(u,v,w) = |u - v| + |u - w| + |v - w| \quad \text{với mọi } u,v,w \in E,$$

là một G - metric trên E.

Định nghĩa 1.1.3. Không gian G - metric (E,G) gọi là đối xứng nếu

$G(u,v,v) = G(v,u,u)$ với mọi $u,v \in E$.

1.2. Một số tính chất cơ bản của G - Metric

Mệnh đề 1.2.1. *Nếu (E,G) là không gian G - metric thì*

$$G(u,v,v) \le 2G(v,u,u) \quad \text{với mọi } u,v \in E.$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức hình chữ nhật (G5) cùng với tính đối xứng (G4), ta có

$G(u,v,v) = G(v,v,u) \le G(v,u,u) + G(u,v,u) = 2G(v,u,u)$. □

Hệ quả 1.2.2. *Cho $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ là hai dãy trong không gian G - metric (E,G). Khi đó* $\lim_{n\to\infty} G(u_n,u_n,v_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} G(u_n,v_n,v_n) = 0$.

Mệnh đề 1.2.3. *Cho (E,G) là không gian G - metric. Khi đó, với mọi $u,v,w,a \in E$, ta có*

$(a)\ G(u,v,w) \le G(u,u,v) + G(u,u,w)$.

$(b)\ G(u,v,w) \le G(u,a,a) + G(v,a,a) + G(w,a,a)$.

$(c)\ |G(u,v,w) - G(u,v,a)| \le \max\{G(a,w,w), G(w,a,a)\}$.

(d) *Nếu $n \ge 2$ và $u_1,u_2,\ldots,u_n \in E$ thì*

$G(u_1,u_n,u_n) \le \sum_{i=1}^{n-1} G(u_i,u_{i+1},u_{i+1})$ *và*

$$G(u_1,u_1,u_n) \le \sum_{i=1}^{n-1} G(u_i,u_i,u_{i+1}). \tag{1.1}$$

(e) *Nếu $G(u,v,w) = 0$ thì $u = v = w$.*

$(f)\ G(u,v,w) \le G(u,a,w) + G(a,v,w)$.

$(g)\ G(u,v,w) \le \frac{2}{3}[G(u,v,a) + G(u,a,w) + G(a,v,w)]$

(h) *Nếu* $u \in E \setminus \{w, a\}$ *thì* $\left|G(u,v,w) - G(u,v,a)\right| \le G(a,u,w)$.

(i) $G(u,v,v) \le 2G(u,v,w)$.

Chứng minh. (a) Áp dụng (G_4) và (G_5) với $a = u$, ta có

$$G(u,v,w) = G(v,u,w) \le G(v,u,u) + G(u,u,w)$$

$$= G(u,u,v) + G(u,u,w). \qquad \square$$

(b) Áp dụng (G_5) hai lần và sử dụng (G_4), ta có

$$G(u,v,w) \le G(u,a,a) + G(a,v,w) = G(u,a,a) + G(v,a,w)$$

$$\le G(u,a,a) + G(v,a,a) + G(a,a,w). \qquad \square$$

(c) Theo (G_4) và (G_5), ta có

$$G(u,v,w) = G(w,v,u) \le G(w,a,a) + G(a,v,w),$$

$$G(a,v,u) \le G(a,w,w) + G(w,v,u).$$

Suy ra,

$$G(u,v,w) - G(a,v,u) \le G(w,a,a) \text{ và}$$

$$G(a,v,u) - G(u,v,w) \le G(a,w,w).$$

Do đó,

$$\left|G(u,v,w) - G(u,v,a)\right| \le \max\{G(a,w,w), G(w,a,a)\}. \square$$

(d) Nếu $n = 2$, điều đó là hiển nhiên, và nếu $n = 3$ thì (1.1) là tính chất (G_5) khi cho $u = u_1$, $a = u_2$ và $v = w = u_3$. Bằng cách quy nạp, nếu (1.1) xảy ra với $n \ge 3$ thì nó cũng xảy ra với $n + 1$ bởi vì, cũng theo (G_5) và giả thiết quy nạp, ta có

$$G(u_1, u_{n+1}, u_{n+1}) \le G(u_1, u_n, u_n) + G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1})$$

$$\le \sum_{i=1}^{n-1} G(u_i, u_{i+1}, u_{i+1}) + G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} G(u_i, u_{i+1}, u_{i+1}). \square$$